＊学术论文＊

Dedekind 和的部分和＊

张文鹏＊＊　易　媛
（西北大学数学系，西安 710069）

摘要　利用 Dirichlet L-函数的二次加权均值公式得到了 Dedekind 和的一个有趣的一次均值定理．

关键词　Dedekind 和　一次均值　值分布

对于任意的正整数 k 及 h，Dedekind 和 $S(h,k)$ 定义如下：

$$S(h,k)=\sum_{a=1}^{k}\left(\left(\frac{a}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{ah}{k}\right)\right),$$

其中

$$((x))=\begin{cases}x-[x]-\frac{1}{2}, & \text{如果 } x \text{ 不是整数；}\\ 0, & \text{如果 } x \text{ 是整数．}\end{cases}$$

这样定义的 $S(h,k)$ 称为著名的 Dedekind 和，在模形式理论研究中占有十分重要的位置，因而引起了不少数论专家的重视和兴趣．最近，Conrey 等人[1]研究了 $S(h,k)$ 的均值分布性质，得到了 Dedekind 和的一个一般性的均值定理：

$$\sum_{h=1}^{k}{}'\,|S(h,k)|^{2m}=f_m(k)\left(\frac{k}{12}\right)^{2m}+O\left(\left(k^{\frac{9}{5}}+k^{2m-1+\frac{1}{m+1}}\right)\log^3 k\right),\tag{1}$$

其中 $\sum\limits_{h}{}'$ 表示对所有满足 $(k,h)=1$ 的 h 求和，且 $f_m(k)$ 由 Dirichlet 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_m(n)}{n^s}=2\frac{\zeta^2(2m)}{\zeta(4m)}\cdot\frac{\zeta(s+4m-1)}{\zeta^2(s+2m)}\zeta(s)$$

的系数所确定．

本文研究了 $S(h,k)$ 的一次均值分布性质，利用解析方法给出了 $S(h,k)$ 的一个有趣的一次均值定理，即证明了下面的主要结论：

定理　设 k 为正整数，则对任一实数 $1<N\leqslant\frac{1}{2}k$，有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant N}{}'S(n,k)=\frac{1}{12}\phi(k)\left(\ln N+\gamma+\sum_{p\mid k}\frac{\ln p}{p-1}\right)+O\left(\frac{k2^{\omega(k)}}{N}\right)+O(Nk^{\varepsilon}),$$

1999-03-31 收稿，1999-09-27 收修改稿

＊国家自然科学基金（批准号：19531010）及中国博士后基金资助项目

＊＊现通讯地址：西安交通大学基础科学研究中心，西安 710049

其中 $\phi(k)$ 为 Euler 函数，γ 为 Euler 常数，$\sum\limits_{p\mid k}$ 表示对 k 的所有不同素因子求和，ε 为任意给定的正数，$\omega(k)$ 表示 k 的所有不同素因数的个数.

显然，由此定理即可得出：

推论　设 $0<\varepsilon<1$ 是任意给定的正数，则当 $k^{\varepsilon}\leqslant N\leqslant k^{1-\varepsilon}$ 时有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant N}{}' S(n,k)\sim\frac{1}{12}\phi(k)\left(\ln N+\gamma+\sum_{p\mid k}\frac{\ln p}{p-1}\right).$$

由 Dedekind 和的性质知 $S(a,k)=-S(k-a,k)$ 及 $\sum\limits_{a=1}^{k}{}' S(a,k)=0$. 另一方面，由本文的定理及其证明过程也不难看出当 k 较大时，几乎对所有 $1\leqslant a<k^{1-\varepsilon}$，有 $S(a,k)\asymp\frac{k}{12a}$. 这样有理由提出下面的：

猜测　对所有 $1\leqslant a<k^{1-\varepsilon}$ 且 $(a,k)=1$，当 k 充分大时有

$$S(a,k)>0.$$

1　几个引理

为了完成定理的证明，需要下面两个引理.

引理 1　设整数 $k\geqslant 3$ 且 $(h,k)=1$. 则有恒等式

$$S(h,k)=\frac{1}{\pi^2 k}\sum_{d\mid k}\frac{d^2}{\phi(d)}\sum_{\substack{\chi \bmod d\\ \chi(-1)=-1}}\chi(h)\,|L(1,\chi)|^2,$$

其中 χ 表示模 d 的 Dirichlet 奇特征（即 $\chi(-1)=-1$），$L(s,\chi)$ 表示对应于特征 χ 的 Dirichlet L-函数.

证明参阅文献[2].

引理 2　设 k 为正整数，q 为 k 的任一大于或等于 2 的因子. 则对任一实数 $1<N\leqslant\frac{1}{2}k$，有渐近公式

$$\sum_{a\leqslant N}{}'\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(a)\,|L(1,\chi)|^2=\frac{\pi^2}{12k}\phi(k)\phi(q)\prod_{p\mid q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(\ln N+\gamma+\sum_{p\mid k}\frac{\ln p}{p-1}\right)+$$
$$O\left(\frac{\phi(q)2^{\omega(k)}}{N}\prod_{p\mid q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\right)+O(Nq^{\varepsilon}),$$

其中 $\sum\limits_{a\leqslant N}{}'$ 表示对所有满足 $1\leqslant a\leqslant N$ 且 $(a,k)=1$ 的正整数 a 求和.

证　不失一般性，假定 $N\leqslant q$. 为书写方便，先设 $A(\chi,y)=\sum\limits_{q/a<n\leqslant y}\chi(n)$，$B(\chi,y)=\sum\limits_{q<n\leqslant y}\chi(n)$. 于是由 Abel 恒等式有：

$$L(1,\chi)=\sum_{n\leqslant q/a}\frac{\chi(n)}{n}+\int_{q/a}^{+\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}\mathrm{d}y=\sum_{n\leqslant q}\frac{\chi(n)}{n}+\int_{q}^{+\infty}\frac{B(\chi,y)}{y^2}\mathrm{d}y,$$

从而有

$$\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(a)\,|L(1,\chi)|^2=\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(a)\left(\sum_{n\leqslant q/a}\frac{\chi(n)}{n}+\int_{q/a}^{+\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}\mathrm{d}y\right)\times$$

$$\left(\sum_{n\leqslant q}\frac{\overline{\chi}(n)}{n}+\int_q^{+\infty}\frac{B(\overline{\chi},y)}{y^2}\mathrm{d}y\right)$$

$$=\sum_{\substack{\chi\bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(a)\left(\sum_{n\leqslant q/a}\frac{\chi(n)}{n}\right)\left(\sum_{m\leqslant q}\frac{\overline{\chi}(m)}{m}\right)+$$

$$\sum_{\substack{\chi\bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(a)\left(\sum_{n\leqslant q/a}\frac{\chi(n)}{n}\right)\left(\int_q^{+\infty}\frac{B(\overline{\chi},y)}{y^2}\mathrm{d}y\right)+$$

$$\sum_{\substack{\chi\bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(a)\left(\sum_{m\leqslant q}\frac{\overline{\chi}(m)}{m}\right)\left(\int_{q/a}^{+\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}\mathrm{d}y\right)+$$

$$\sum_{\substack{\chi\bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(a)\left(\int_{q/a}^{+\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}\mathrm{d}y\right)\left(\int_q^{+\infty}\frac{B(\overline{\chi},y)}{y^2}\mathrm{d}y\right)$$

$$\equiv M_1+M_2+M_3+M_4,$$

则

$$\sum_{a\leqslant N}{}'\sum_{\substack{\chi\bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(a)\left|L(1,\chi)\right|^2=\sum_{a\leqslant N}{}'(M_1+M_2+M_3+M_4). \tag{2}$$

现在分别估计(2)式中的各项.

(ⅰ)由奇特征的正交性可知当$(q,mn)=1$时有:

$$\sum_{\substack{\chi\bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(n)\overline{\chi}(m)=\begin{cases}\frac{1}{2}\phi(q), & \text{如果 } n\equiv m \text{ 模 } q;\\ -\frac{1}{2}\phi(q), & \text{如果 } n\equiv -m \text{ 模 } q;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由此可得

$$M_1=\sum_{\substack{\chi\bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(a)\left(\sum_{n\leqslant q/a}\frac{\chi(n)}{n}\right)\left(\sum_{m\leqslant q}\frac{\overline{\chi}(m)}{m}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\phi(q)\sum_{\substack{n\leqslant q/a\\ na\equiv m(q)}}{}'\sum_{m\leqslant q}{}'\frac{1}{mn}-\frac{1}{2}\phi(q)\sum_{\substack{n\leqslant q/a\\ na\equiv -m(q)}}{}'\sum_{m\leqslant q}{}'\frac{1}{nm}$$

$$=\frac{1}{2}\phi(q)\sum_{n\leqslant q/a}{}'\frac{1}{an^2}-\frac{1}{2}\phi(q)\sum_{n\leqslant q/a}{}'\frac{1}{n(q-an)}$$

$$=\frac{1}{2}\phi(q)\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{1}{an^2}+O\left(\phi(q)\sum_{n>q/a}\frac{1}{an^2}\right)+O\left(\phi(q)\sum_{n\leqslant q/a}{}'\frac{1}{n(q-na)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\phi(q)}{a}\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{1}{n^2}+O\left(\frac{\phi(q)}{a}\sum_{n>q/a}\frac{1}{n^2}\right)+O\left(\phi(q)\sum_{n\leqslant q/2a}\frac{1}{nq}\right)+$$

$$O\left(\phi(q)\sum_{q/2a<n\leqslant\frac{q}{a}-1}\frac{a}{q(q-na)}\right)+O\left(\frac{\phi(q)}{q}\frac{a}{q-a\left[\frac{q}{a}\right]}\right)=$$

$$\frac{\pi^2}{12}\frac{\phi(q)}{a}\prod_{p\mid q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)+O\left(\frac{\phi(q)}{q}\ln q\right)+O\left(\frac{a}{q-a\left[\frac{q}{a}\right]}\right). \tag{3}$$

进而由(3)式可以推出

$$\sum_{a\leqslant N}{}' M_1=\sum_{a\leqslant N}{}'\left[\frac{\pi^2}{12}\frac{\phi(q)}{a}\prod_{p\mid q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)+O\left(\frac{\phi(q)}{q}\ln q\right)+O\left(\frac{a}{q-a\left[\frac{q}{a}\right]}\right)\right]=$$

$$\frac{\pi^2}{12}\phi(q)\prod_{p\mid q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\sum_{a\leqslant N}{}'\frac{1}{a}+O\left(\frac{N\phi(q)}{q}\ln q\right)+O\left(\sum_{a\leqslant N}{}'\frac{a}{q-a\left[\frac{q}{a}\right]}\right). \tag{4}$$

注意到

$$\sum_{a\leqslant N}{}'\frac{1}{a}=\frac{\phi(k)}{k}\left(\ln N+\gamma+\sum_{p\mid k}\frac{\ln p}{p-1}\right)+O\left(\frac{2^{\omega(k)}}{N}\right), \tag{5}$$

以及

$$\sum_{a\leqslant N}{}'\frac{a}{q-a\left[\frac{q}{a}\right]}\leqslant N\sum_{u\leqslant N-1}\sum_{\substack{a\leqslant N\\ q-a\left[\frac{q}{a}\right]=u}}\frac{1}{u}\leqslant N\sum_{u\leqslant N-1}\frac{d(q-u)}{u}\ll Nq^{\varepsilon}, \tag{6}$$

这里用到除数函数的估计式 $d(n)\ll n^{\varepsilon}$(参阅文献[3]中定理 13.12).

将(5),(6)式代入(4)式立即得到

$$\sum_{a\leqslant N}{}' M_1=\frac{\pi^2}{12}\phi(q)\prod_{p\mid q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left[\frac{\phi(k)}{k}\left(\ln N+\gamma+\sum_{p\mid k}\frac{\ln p}{p-1}\right)\right]+$$
$$O\left(\phi(q)\prod_{p\mid q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\frac{2^{\omega(k)}}{N}\right)+O(Nq^{\varepsilon})$$
$$=\frac{\pi^2}{12}\frac{\phi(k)}{k}\phi(q)\prod_{p\mid q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(\ln N+\gamma+\sum_{p\mid k}\frac{\ln p}{p-1}\right)+$$
$$O\left(\phi(q)\prod_{p\mid q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\frac{2^{\omega(k)}}{N}\right)+O(Nq^{\varepsilon}). \tag{7}$$

(ⅱ) 由于 $\chi(-1)=-1$ 及特征的周期性,可假定 $B(\overline{\chi},y)=\sum\limits_{q<n\leqslant y}\overline{\chi}(n)=\sum\limits_{q<n\leqslant y\leqslant 2q}\overline{\chi}(n)$,于是由特征的正交性,有

$$\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(a)\left(\sum_{n\leqslant q/a}\frac{\chi(n)}{n}\right)B(\overline{\chi},\ y)\ll\frac{1}{2}\phi(q)\sum_{\substack{n\leqslant q/a\\ na\equiv m(q)}}{}'\sum_{m\leqslant q}{}'\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\phi(q)\sum_{\substack{n\leqslant q/a\\ na\equiv -m(q)}}{}'\sum_{m\leqslant q}{}'\frac{1}{n},$$
$$\ll\phi(q)\ln q.$$

则

$$\sum_{a\leqslant N}{}' M_2=\sum_{a\leqslant N}{}'\int_q^{+\infty}\left[\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(a)\left(\sum_{n\leqslant q/a}\frac{\chi(n)}{n}\right)B(\overline{\chi},y)\right]\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y\ll$$
$$\sum_{a\leqslant N}{}'\int_q^{+\infty}\frac{\phi(q)\ln q}{y^2}\mathrm{d}y\ll\frac{N}{q}\phi(q)\ln q. \tag{8}$$

(ⅲ)

$$\sum_{a\leqslant N}{}' M_3=\sum_{a\leqslant N}{}'\Bigg[\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(a)\Big(\sum_{m\leqslant q}\frac{\bar{\chi}(m)}{m}\Big)\Big(\int_{q/a}^{+\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}\mathrm{d}y\Big)\Bigg]$$

$$=\sum_{a\leqslant N}{}'\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(a)\Big(\sum_{m\leqslant q}\frac{\bar{\chi}(m)}{m}\Big)\Big(\int_{q/a}^{q}\frac{A(\chi,y)}{y^2}\mathrm{d}y\Big)+$$

$$\sum_{a\leqslant N}{}'\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(a)\Big(\sum_{m\leqslant q}\frac{\bar{\chi}(m)}{m}\Big)\Big(\int_{q}^{+\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}\mathrm{d}y\Big)$$

$$=\sum_{a\leqslant N}{}'\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(a)\Big(\sum_{m\leqslant q}\frac{\bar{\chi}(m)}{m}\Big)\left(\int_{q/a}^{q}\frac{\sum\limits_{q/a<n\leqslant y}\chi(n)}{y^2}\mathrm{d}y\right)+O(N\ln q)$$

$$\ll\phi(q)\sum_{\substack{a\leqslant N\\ na\equiv m(q)}}{}'\sum_{m\leqslant q}\frac{1}{m}\int_{q/a}^{q}\frac{\sum\limits_{q/a<n\leqslant y}1}{y^2}\mathrm{d}y+N\ln q$$

$$\ll\phi(q)\sum_{m\leqslant q}\frac{1}{m}\int_{q/a}^{q}\frac{yNq^{\varepsilon_1}}{qy^2}\mathrm{d}y+N\ln q\ll Nq^{\varepsilon}. \tag{9}$$

其中用到方程 $an=lq+m$,当 l, m 给定时,其方程对 a,n 的解的个数$\ll q^{\varepsilon}$.

(ⅳ) 同理,使用(ⅲ)的估计方法也可以得到估计式

$$\sum_{a\leqslant N}{}' M_4=\sum_{a\leqslant N}{}'\Bigg[\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\Big(\int_{q/a}^{+\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}\mathrm{d}y\Big)\Big(\int_{q}^{+\infty}\frac{B(\bar{\chi},y)}{y^2}\mathrm{d}y\Big)\Bigg]\ll Nq^{\varepsilon}. \tag{10}$$

结合(2)、(7)~(10)式立即推出

$$\sum_{a\leqslant N}{}'\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}\chi(a)\,|L(1,\chi)|^2$$

$$=\frac{\pi^2}{12}\frac{\phi(k)}{k}\phi(q)\prod_{p\mid q}\Big(1-\frac{1}{p^2}\Big)\Big(\ln N+\gamma+\sum_{p\mid k}\frac{\ln p}{p-1}\Big)+$$

$$O\Big(\phi(q)\prod_{p\mid q}\Big(1-\frac{1}{p^2}\Big)\frac{2^{\omega(k)}}{N}\Big)+O(Nq^{\varepsilon}).$$

引理2证毕.

2 定理的证明

在上面两个引理的基础上,本节将完成定理的证明. 由引理1易得恒等式

$$\sum_{n\leqslant N}{}' S(n,k)=\sum_{n\leqslant N}{}'\Bigg[\frac{1}{\pi^2 k}\sum_{d\mid k}\frac{d^2}{\phi(d)}\sum_{\substack{\chi \bmod d\\ \chi(-1)=-1}}\chi(n)\,|L(1,\chi)|^2\Bigg]$$

$$=\frac{1}{\pi^2 k}\sum_{d\mid k}\frac{d^2}{\phi(d)}\sum_{n\leqslant N}{}'\sum_{\substack{\chi \bmod d\\ \chi(-1)=-1}}\chi(n)\left|L(1,\chi)\right|^2. \tag{11}$$

将引理 2 代入(11)式可得

$$\sum_{n\leqslant N}{}'S(n,k)=\frac{\phi(k)}{12k^2}\sum_{d\mid k}d^2\prod_{p\mid d}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(\ln N+\gamma+\sum_{p\mid k}\frac{\ln p}{p-1}\right)+$$
$$\frac{1}{\pi^2 k}\sum_{d\mid k}\frac{d^2}{\phi(d)}\left[O\left(\phi(d)\prod_{p\mid d}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\frac{2^{\omega(k)}}{N}\right)+O(Nd^{\varepsilon})\right]$$
$$=\frac{1}{12}\phi(k)\left(\ln N+\gamma+\sum_{p\mid k}\frac{\ln p}{p-1}\right)+O\left(\frac{k2^{\omega(k)}}{N}\right)+O(Nk^{\varepsilon}),$$

其中用到恒等式

$$\sum_{d\mid k}d^2\prod_{p\mid d}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)=k^2,$$

于是完成了定理的证明.

参　考　文　献

1　Conrey J B, Fransen E, Klein R, et al. Mean values of Dedekind sums. Journal of Number Theory, 1996, 56: 214

2　Zhang Wenpeng. On the mean values of Dedekind sums. Journal de Theorie des Nombres, 1996, 8: 429

3　Tom M A. Introduction to Analytic Number Theory. New York: Springer-Verlag, 1976